

RED DE APOYO DE LA ESTACIÓN GPS PERMANENTE DE LANZAROTE CONTROL NETWORK OF THE PERMANENT GPS STATION IN LANZAROTE

Miguel J. Sevilla, Laura García y Esther Ortiz

Instituto de Astronomía y Geodesia, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 MADRID,
maast01@sis.ucm.es

SUMMARY

In order to control the stability of the pillar where the GPS antenna is installed, a geodetic control network has been built around it. This antenna correspond to the GPS permanent station that the Institute of Astronomy and Geodesy (UCM-CSIC) has in the Geodynamic station of Jameos (Lanzarote). This network of 13 bench marks has been observed by classic geodetic techniques in two epochs: 2000 and 2001.

Fundamentally we are interested in the heights of the different bench marks, then the observations have been carried out by methods of geometric and trigonometric precise leveling. With the data of each one of the campaigns different types of adjustments have been done, maintaining the same reference system. The precision of the measurements and the reliability of the networks have been calculated.

In this work we present the methodology used in leveling, the calculation of level differences, the adjustment of the network and the results obtained. For the analysis of deformations stochastic and deterministic methods have been applied.

1. INTRODUCCIÓN

El Instituto de Astronomía y Geodesia (UCM-CSIC) de Madrid ha puesto en funcionamiento recientemente una estación GPS permanente en la Isla de Lanzarote (Islas Canarias). La finalidad de dicha estación es el estudio del nivel del mar relacionando los movimientos verticales de la corteza con las variaciones del nivel del mar obtenidas con dos mareógrafos instalados en las proximidades. Tenemos que separar unos movimientos de los otros y estudiar ambos hechos de forma independiente.

Con objeto de controlar la estabilidad del pilar donde está instalada la antena GPS permanente, se ha construido una red geodésica en sus alrededores. La red está constituida por un punto central (la antena GPS) y 13 vértices geodésicos (Figura 1) y en ella, se han realizado observaciones de diferencias de altitudes por nivelación geométrica y nivelación trigonométrica de precisión en dos épocas: 2000 y 2001.

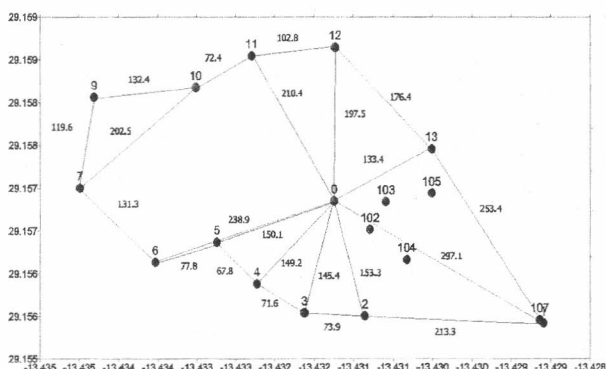


Figura 1 – Red de control de la estación GPS permanente de Jameos. (Control network of the GPS permanent station of Jameos.).

Los datos de observación de distancias, distancias cenitales y desniveles, debidamente corregidos nos permiten calcular las diferencias de altitudes directas y reciprocas entre dos vértices (Sevilla y Romero, 1989). Además, la ley de propagación de la varianza nos permite estimar la precisión de la diferencia de altitudes así calculada en función de las precisiones de las medidas que intervienen. Estos valores representan la configuración de la red en una época determinada. Tenemos los valores de estos elementos para dos épocas distintas.

2. ANÁLISIS DETERMINISTA DE DATOS

En primer lugar se realiza un análisis determinista que consiste en calcular las diferencias entre las altitudes observadas en las distintas campañas. Sea λ el vector de resultados de todas las campañas, entonces, las diferencias observadas t vienen dadas por

$$t = D\lambda$$

con la matriz de covarianzas

$$C_{tt} = DC_{\lambda\lambda}D^T$$

siendo $C_{\lambda\lambda}$ la matriz de covarianzas del vector λ y D el operador diferencias.

La comparación se hace con los resultados de la observación directa, la reciproca y la media, de esta forma es más fácil detectar donde está el error, si lo hay. No obstante este método no tiene en cuenta el carácter aleatorio de las medidas.

Dadas las características de los instrumentos y métodos empleados en la observación podemos esperar unas precisiones de uno o dos milímetros, de manera que este será el límite de tolerancia para admitir variaciones significativas.

Del examen de las correspondientes comparaciones se deducen unas máximas diferencias del orden de 12.4 mm y 10.3 mm en las altitudes de los puntos 6 y 13, quedando las demás diferencias por debajo de 1.0 mm. Esto indica claramente que estos vértices se han movido de una campaña a otra. Al final comentaremos las causas de estos movimientos.

3. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE DATOS

En segundo lugar se utilizan métodos estadísticos para la contrastación de valores observados antes y después de realizar las compensaciones de la red. Se aplican diferentes tests de hipótesis.

Supongamos que como resultado de las observaciones realizadas en k campañas distintas hemos obtenido diferentes valores de un mismo observable λ_i y de sus varianzas s_i^2 . Este observable puede ser cualquiera de los elementos geodésicos de una red, en nuestro caso son diferencias de altitudes. La hipótesis fundamental es que cada uno de estos valores proviene de una población normal definida por los parámetros μ : media poblacional y σ^2 : varianza poblacional, es decir $N(\mu, \sigma^2)$. (Bjerhammar, 1979, Lloyd, 1984).

Test de igualdad de varianzas: Este test indicará si los resultados obtenidos en la observación de una red geodésica en diferentes épocas provienen de poblaciones de igual varianza y pueden por tanto ser contrastados con criterios de fiabilidad.

Si consideramos el conjunto de las k campañas de observación realizadas, tendremos para cada observable los resultados muestrales $\lambda_i, s_i^2, \dots, i = 1, \dots, k$ provenientes de las poblaciones normales $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ que supondremos independientes

En primer lugar debe aplicarse el test de Barlett (Bjerhammar, 1979) para contrastar la igualdad de todas las varianzas, pero como solamente tenemos dos campañas contrastamos las varianzas de las dos campañas. Tomamos la hipótesis nula

$$H_0: \sigma_i^2 = \sigma_j^2$$

con la hipótesis alternativa

$$H_1: \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$$

Definimos estadístico

$$y = \frac{\max(s_i^2, s_j^2)}{\min(s_i^2, s_j^2)}$$

y establecemos un test de dos colas rechazando la hipótesis nula a un nivel de significación α , si

$$y > F_{n_i-1, n_j-1, \alpha/2}$$

donde $F_{n_i-1, n_j-1, \alpha/2}$ es el valor de la F de Snedecor con n_i-1, n_j-1 grados de libertad a un nivel de significación α .

Test de igualdad de medias. Una vez contrastada la igualdad de varianzas podemos plantear el siguiente test sobre las medias para la detección de variaciones significativas. Se toma la hipótesis nula

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$

y la hipótesis alternativa

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j$$

Entonces con los valores de las muestras $(\lambda_i, s_i^2), (\lambda_j, s_j^2)$

y de la hipótesis nula calculamos el estadístico

$$y = \frac{(\lambda_i - \lambda_j)}{\sqrt{((n_i - 1)s_i^2 + (n_j - 1)s_j^2)}} \sqrt{\frac{n_i n_j (n_i + n_j - 2)}{n_i + n_j}}$$

y se rechaza la hipótesis nula si

$$|y| > t_{n_i+n_j-2, \alpha/2}$$

donde $t_{n_i+n_j-2, \alpha/2}$ es el valor de la t de Student con n_i+n_j-2 grados de libertad a un nivel de significación α .

Si se rechaza la hipótesis nula podemos concluir que existe una variación significativa del correspondiente elemento de la red geodésica y que por tanto la red se ha deformado. En las campañas analizadas el test rechaza la igualdad de medias para los vértices 6 y 13, indicando desplazamientos de estas señales.

4. COMPENSACIÓN DE LA RED GEODÉSICA.

Con los elementos geodésicos determinados por observación, después de someterlos a los análisis previos, se procede a efectuar las compensaciones de la red, individualmente para cada campaña de observación. Se realiza la compensación altimétrica. Se utiliza un modelo matemático de observaciones indirectas, es decir se aplica el método de mínimos cuadrados con ecuaciones de observación. Se consideran cinco modelos de compensación: 1.) con un punto fijo, 2.) con más de un punto fijo, 3.) red libre, 4.) red libre con parámetros sistemáticos y 5.) red fija con parámetros sistemáticos. Cada uno de estos casos presenta ventajas según la hipótesis de posible deformación que se pretenda analizar.

Esquemáticamente, el modelo de compensación es de la forma (Sevilla, 1986)

$$Ax - t = v$$

donde A es la matriz de diseño, t el vector de observaciones, v el vector de errores residuales y x el vector de parámetros. El correspondiente modelo estocástico viene definido por

$$E(v) = 0$$

$$\text{Cov}(v) = \sigma_0^2 P^{-1} = \sigma_0^2 Q = \Sigma_{vv}$$

$$v \approx N(0, \sigma_0^2 Q)$$

donde P es la matriz de pesos de las observaciones que se supone diagonal (Q es la matriz cofactor a priori) y σ_0^2 es la varianza a priori de peso unidad.

Como resultado de la compensación obtenemos los parámetros estimados

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P t = N^{-1} A^T P t$$

y su matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1}$$

donde

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{v}^T P \hat{v}}{f}$$

siendo $\hat{\mathbf{v}} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{t}$ los residuales estimados y f el número de grados de libertad del ajuste. (En caso de red libre, la matriz A debe suponerse ampliada con un conjunto de constreñimientos internos, o la matriz N^{-1} suponerse pseudo inversa).

Una vez efectuada la compensación los resultados son sometidos a los siguientes test estadísticos: (a) Test de normalidad de los residuales. (b) Test de la varianza de la unidad de peso utilizando la distribución F aplicada a la relación

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad \text{(c) Test de detección de errores groseros. (d) Test de}$$

Baarda y cálculo de parámetros de fiabilidad (Baarda, 1968).

Por ejemplo, la compensación como red libre de la campaña del año 2000, en el elipsoide WGS84 da los siguientes resultados en cuanto a los parámetros característicos de error se refiere

Error medio de una observación de peso unidad	0.9592
Suma de residuos ponderados	2.7500
Suma de residuos sin ponderar	0.0022
Suma de cuadrados de residuos ponderados	8.2809
Suma de cuadrados de residuos sin ponderar	0.0000
Desviación típica a posteriori	0.0008 metros
Traza de la matriz cofactor de los parámetros	6.0478
Desviación típica media de los Parámetros	0.0005 metros

En definitiva dispondremos para cada campaña de observación de los siguientes elementos con garantía y fiabilidad. (a) Test de normalidad de los residuales. (b) Parámetros (altitudes) $\hat{\mathbf{x}}$. (c) Residuales (de diferentes tipos de observaciones) $\hat{\mathbf{v}}$. (d) Matriz de varianzas-covarianzas $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$. (e) Matriz del sistema de ecuaciones normales N .

Con estos valores vamos a establecer algunos test estadísticos para averiguar si las diferencias entre campañas pueden ser debidas a los errores propios de los instrumentos y métodos empleados, o por el contrario, son diferencias significativas que nos permitan inducir conclusiones acerca de una posible deformación de la red, o de una parte de ella a lo largo del tiempo.

Test sobre los parámetros estimados. Estos tests nos van a permitir contrastar los valores de los parámetros con un conjunto de valores fijos asignados a los mismos de manera que podamos decidir sobre su igualdad. Entonces la aplicación consiste en suponer como valores fijos los obtenidos en una campaña y contrastar con ellos los obtenidos en las demás, esto se hace con todas las campañas. Como resultado podremos decir si ha habido variaciones de los parámetros de una campaña a otra.

La importancia de estos tests radica en que como los parámetros representan las altitudes de los vértices, si la hipótesis de igualdad es rechazada a un cierto nivel de confianza, se puede concluir que ha habido deformaciones de la red, lo que implicaría movimientos de los vértices en el terreno.

Para la comparación estadística de todos los valores obtenidos en el ajuste de una campaña, $\hat{\mathbf{x}}^j$, $j = 1, \dots, k$, con un conjunto de valores fijos, \mathbf{x}^f , contrastamos la hipótesis nula

$$H_0: \hat{\mathbf{x}}^j = \mathbf{x}^f, j = 1, \dots, k$$

La hipótesis H_0 se rechaza a un nivel de significación α si el estadístico

$$Y = \frac{(\hat{\mathbf{x}}^j - \mathbf{x}^f)^T N^j (\hat{\mathbf{x}}^j - \mathbf{x}^f)}{(\hat{\sigma}_0^2) r_j}$$

es

$$Y > F_{r_j, f_j, \alpha}$$

N es la matriz del sistema de ecuaciones normales, $\hat{\sigma}_0^2$ es la varianza a posteriori de referencia, r es el rango de la matriz de diseño, f es el número de grados de libertad del ajuste y $F_{r_j, f_j, \alpha}$ es el valor de la distribución F con r_j y f_j grados de libertad.

Si se desea contrastar un subconjunto de q_j parámetros, $q_j < n_j$, establecemos el test anterior de la siguiente forma. Descomponemos el vector de parámetros en dos bloques \mathbf{x}_1^j , con los parámetros a analizar, y \mathbf{x}_2^j con los restantes. Entonces sean $N_{11}^j, N_{12}^j, N_{21}^j, N_{22}^j$ los correspondientes bloques que se forman en la matriz normal. Ahora la hipótesis nula es

$$H_0: \hat{\mathbf{x}}_1^j = \mathbf{x}_1^f$$

y la hipótesis alternativa

$$H_1: \hat{\mathbf{x}}_1^j \neq \mathbf{x}_1^f$$

Se define el estadístico

$$Y = \frac{(\hat{\mathbf{x}}_1^j - \mathbf{x}_1^f)^T (N_{11}^j - N_{12}^j (N_{22}^j)^{-1} N_{21}^j) (\hat{\mathbf{x}}_1^j - \mathbf{x}_1^f)}{(\hat{\sigma}_0^2)^j q_j}$$

y se rechaza la hipótesis nula a un nivel de significación α , si

$$Y > F_{q_j, f_j, \alpha}$$

Como caso particular puede aplicarse este test sobre cada parámetro individual. Entonces el estadístico Y se reduce a

$$Y = \frac{(\hat{x}_1^j - x_1^f)^2}{\hat{\sigma}_{\hat{x}_1^j}^2}$$

donde $\hat{\sigma}_{\hat{x}_1^j}^2$ es la varianza del parámetro \hat{x}_1 obtenida en el ajuste de la campaña j dada por el correspondiente elemento de la diagonal de la matriz covarianza a posteriori $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^j$.

La hipótesis nula se rechaza si

$$Y > F_{1, f_j, \alpha}$$

Test alternativo. Si las soluciones para todas las campañas se toman como variables y ninguna como un valor fijo de referencia, la comparación entre dos campañas se efectúa de la siguiente forma. Si designamos por \mathbf{x}^1 y \mathbf{x}^2 los vectores de coordenadas para dos épocas 1 y 2 cualesquiera, respectivamente, tratamos de comprobar la hipótesis nula

$$H_0: \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$$

Frente a la hipótesis alternativa

$$H_1: \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$$

que puede ser escrita en términos de la hipótesis lineal general como

$$H\mathbf{x} - h = 0$$

donde

$$H = (I, -I)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{pmatrix}$$

$$h = 0$$

Como los vectores $\hat{\mathbf{x}}^1$ y $\hat{\mathbf{x}}^2$ son diferentes e independientes, la solución del modelo global $A\mathbf{x} - \mathbf{t} = \mathbf{v}$ da

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^1 \\ \hat{\mathbf{x}}^2 \end{pmatrix}. \text{ Además de los resultados de cada ajuste individual, podemos calcular la varianza global}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{v}}_1^T P_1 \hat{\mathbf{v}}_1) + (\hat{\mathbf{v}}_2^T P_2 \hat{\mathbf{v}}_2)}{f_1 + f_2}$$

y la matriz cofactor global de los parámetros

$$Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{\mathbf{x}}^1\hat{\mathbf{x}}^1} & 0 \\ 0 & Q_{\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathbf{x}}^2} \end{pmatrix}$$

Consideremos el modelo global formado por el modelo matemático del ajuste y la hipótesis lineal general

$$A\mathbf{x} - \mathbf{t} = \mathbf{v}$$

$$H\mathbf{x} - \mathbf{h} = 0$$

que puede resolverse en forma progresiva como un modelo lineal con constreñimientos, y obtenemos la forma cuadrática de la hipótesis lineal como (Sevilla, 1988)

$$\Delta(\hat{\mathbf{v}}^T P \hat{\mathbf{v}}) = (\mathbf{h} - H\hat{\mathbf{x}})^T (H Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} H^T)^{-1} (\mathbf{h} - H\hat{\mathbf{x}})$$

Si la hipótesis nula es correcta, sustituyendo aquí las hipótesis obtenemos

$$\Delta(\hat{\mathbf{v}}^T P \hat{\mathbf{v}}) = (\hat{\mathbf{x}}^1 - \hat{\mathbf{x}}^2)^T (Q_{\hat{\mathbf{x}}^1\hat{\mathbf{x}}^1} + Q_{\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathbf{x}}^2})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}^1 - \hat{\mathbf{x}}^2)$$

Entonces podemos definir el estadístico

$$T = \frac{(\hat{\mathbf{x}}^1 - \hat{\mathbf{x}}^2)^T (Q_{\hat{\mathbf{x}}^1\hat{\mathbf{x}}^1} + Q_{\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathbf{x}}^2})^{-1} (\hat{\mathbf{x}}^1 - \hat{\mathbf{x}}^2)}{\hat{\sigma}_0^2 s}$$

donde $s = \text{rango}(Q_{\hat{\mathbf{x}}^1\hat{\mathbf{x}}^1} + Q_{\hat{\mathbf{x}}^2\hat{\mathbf{x}}^2})$

En estas condiciones, si

$$T > F_{s,f,\alpha}$$

siendo $F_{s,f,\alpha}$ el valor de la distribución F con s y f grados de libertad se rechaza la hipótesis nula y puede concluirse que se ha producido alguna deformación entre las dos épocas.

Debe señalarse que este estimador se reduce al estimador anterior si los datos de una campaña se toman como fijos.

5. RESULTADOS

Para la realización de todos los cálculos se han empleado diversos programas de cálculo en FORTRAN 77, habiendo tenido la precaución de realizar la programación para un número variable de campañas de observación, con lo que esta metodología podrá aplicarse fácilmente en el futuro cuando se disponga de más campañas de observación.

Como ejemplos del análisis estadístico de deformaciones, en la Tabla 1 presentamos los resultados del test sobre todos los parámetros estimados y en la Tabla 2 los resultados del test sobre cada parámetro estimado.

Tabla 1 - Test sobre todos los parámetros estimados
(Test over all the parameters)

PARÁMETROS FIJOS AJUSTE 1	PARÁMETROS COMPARADOS AJUSTE 2
0.0006501700	0.0003000000
-0.0003197368	-0.0000333333
0.0001906195	-0.0001666667
-0.0002084048	-0.0007666667
0.0006841662	-0.0015333333
0.0009609033	0.0147244444
0.0011985438	-0.0002511111
0.0017361842	-0.0001266667
0.0021738247	0.0008977778
0.0002114651	-0.0003777778
0.0006605707	-0.0014311111
0.0014702469	0.0109844444

Valor estadístico 49.73, Valor test 4.00 (alfa 0.05)

Hipótesis nula de igualdad de todos los parámetros **rechazada**

Tabla 2 - Test sobre cada parámetro estimado
(Test over each parameters)

N	P.FIJOS	P.COMP	DIF	EST	TEST	H.
1	0.0006501	0.0003000	-0.0003501	0.33	5.99	A
2	-0.0003197	-0.0000333	0.0002864	0.35	5.99	A
3	0.0001906	-0.0001666	-0.0003572	0.49	5.99	A
4	-0.0002084	-0.0007666	-0.0005582	0.77	5.99	A
5	0.0006841	-0.0015333	-0.0022174	2.67	5.99	A
6	0.0009609	0.0147244	0.0137635	14.40	5.99	R
7	0.0011985	-0.0002511	-0.0014496	1.21	5.99	A
9	0.0017361	-0.0001266	-0.0018628	1.49	5.99	A
10	0.0021738	0.0008977	-0.0012760	1.13	5.99	A
11	0.0002114	-0.0003777	-0.0005892	0.75	5.99	A
12	0.0006605	-0.0014311	-0.0020916	2.84	5.99	A
13	0.0014702	0.0109844	0.0095141	11.44	5.99	R

La hipótesis de igualdad de todos los parámetros es rechazada, esto implica que algún punto se ha movido.

El test sobre cada parámetro muestra claramente que la hipótesis de igualdad de los parámetros correspondientes a los puntos 6 y 13 es rechazada y para los demás puntos es aceptada. Por tanto se concluye que los puntos 6 y 13 son los que se han movido.

El test sobre un subconjunto de parámetros rechaza también la hipótesis de igualdad cuando en dicho subconjunto aparece algún parámetro correspondiente a los puntos 6 o 13. Esto confirma la decisión anterior.

También los test de comparación de todos los parámetros con todos rechaza la hipótesis de igualdad cuando intervienen los puntos 6 o 13.

6. COMPARACIÓN DETERMINISTA DE COORDENADAS COMPENSADAS

El operador diferencias D permite la comparación determinista de resultados de diferentes campañas. Este operador puede aplicarse también a las coordenadas compensadas de los vértices para estudiar su variación a lo largo del tiempo.

El examen de todas las comparaciones efectuadas confirma que los puntos 6 y 13 presentan variaciones más allá de los límites de tolerancia propuestos, lo que implica que dichos vértices se han movido entre ambas observaciones.

7. CONCLUSIONES Y ACTUACIONES.

Se ha probado que la comparación directa de medidas de altitudes en una red geodésica repetidamente observada constituye un excelente método de tratamiento de datos de observación para dos fines primordiales; en primer lugar para el control externo de las observaciones y en segundo lugar para la búsqueda de posibles deformaciones de la red. Naturalmente, la magnitud de estas hipotéticas deformaciones ha de ser superior a la precisión obtenida con los instrumentos y métodos empleados.

Además hemos desarrollado un método estadístico para detectar con criterios de fiabilidad posibles deformaciones de la corteza con una red geodésica. Este método analiza los resultados de la compensación de las redes y tiene en cuenta las covarianzas a posteriori.

Estos métodos han sido aplicados a las dos campañas de observación realizadas en la Red de Jameos, y al orden de precisión de nuestra instrumentación (2 milímetros) se han detectado movimientos significativos en los vértices 6 y 13.

El análisis en campo de las señales y la información obtenida del personal de apoyo ha confirmado que dichas señales fueron desplazadas de su sitio original (no se sabe cómo o por quién) y después colocadas otra vez de la mejor forma que se pudo. Nuestro análisis confirma que dicho replanteo no fue correcto.

Después de eliminar las señales movidas, en la compensación de la segunda campaña, se volvió a repetir todo el proceso anterior, tomando dichas señales como estaciones de paso en nivelación, de forma que las medidas efectuadas fueran útiles aunque los vértices correspondientes no se consideraran. El resultado fue que no se detectaron variaciones de las coordenadas por encima del milímetro y que todos los test aceptaron las hipótesis de igualdad. Concluimos pues la estabilidad de la red, salvo dos vértices en cuyo movimiento no intervinieron causas naturales.

8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto código AMB99-0824 del Plan Nacional de I+D.

9. REFERENCIAS

- Baarda, W. (1968): "A testing procedure for use in geodetic networks". Neth Geod. Comm. Pub. on Geodesy. New Series 2, n. 5. Delft
- Bjerhammar, A. (1979): "Theory of errors and generalized matrix inverses". Elsevier Sc. Pub. Co. Amsterdam.
- Lloyd, E. (Ed.) (1984): "Handbook of Applicable Mathematics, Vol. VI: Statistics". John Wiley & Sons. Chichester.
- Sevilla, M. J. (1986): "Formulación de modelos matemáticos para la compensación de redes geodésicas". III Curso de Geodesia Superior. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid
- Sevilla, M. J. (1988): "Redes Geodesias". Curso de Doctorado. Inst. Ast. y Geod. Univ. Comp. Madrid
- Sevilla, M. J. y P. Romero (1989): "Compensación de redes de nivelación trigonométrica". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid.